# 曲面の写像に関する ニールセンの定理について

## 山本喜一教授の御還暦を祝して

古 池 時 彦
岐阜大学教養部数学教室
(1984年10月12日受理)

# A Simple Proof of Nielsen's Theorem on Surface Mappings

Tokihiko KOIKE

位相幾何学における古典的定理の一つとしてニールセンの定理とよばれるものがある。1927年の Acta Mathematica 第50巻に載せられた長編論文「両面をもつ閉曲面についての研究」の中でニールセンは曲面の同相写像と基本群の自己同型との関係について調べている。同相写像が基本群の同型写像を引起すことは周知の事実であるが，逆に基本群の自己同型は同相写像によって常に実現されるだろうか。ニールセンはこの問題を曲面の場合において考察して次に述べる結果を得ている。

定理１　向付できる閉曲面Mの同相写像のホモトピー類と基本群$\pi_1$(M)の自己同型とは相互に一対一に対応する。

ただしMが球面$S^2$と同相の場合は除外し，写像は基本群の基点を固定するものを対象とする。この定理の証明方法はいろいろとあるがザイフェルトの証明(Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 第12巻 (1938)，29－37頁)が最っとも簡単で分りよい。ザイフェルトはまず次に述べるクネーゼルの定理の簡単な別証を与えてその応用としてニールセンの定理を証明している。

定理２　M，$\overline{M}$を向付できない閉曲面とし，その種数をそれぞれ $g$, $\bar{g}$ とする。ただし$\overline{M}$は$S^2$と同相ではないとする。そのとき連続写相 f：$\overline{M}\to M$に対して次の不等式が成立つ。

$$\bar{g}-1 \geqq |\deg(f)|(g-1)$$

しかも等号成立は被覆写像とホモトープのときに限る。

この定理を使ってニールセンの定理を証明しようとする際，次のホップの定理は重要である。

定理３　M，$\overline{M}$は閉曲面でいづれも球面$S^2$あるいは射影平面$P^2$と同相でないとする。(したがって$K(\pi, 1)$である）このとき任意の準同型$j:\pi_1(\overline{M})\to\pi_1(M)$に対してこの準同型を誘導する連続写像 f：$\overline{M}\to M$が存在する。またこのような写像は互いにホモトープである。

そこで定理１を証明してみよう。まず与えられた$\pi_1$(M)の自己同型 $j$ に対して連続写像

$f: M \to M$ が $f_* = j$ ととれる。$g \circ f$ は恒等写像とホモトープであるから，$\deg(g) \cdot \deg(f) = 1$，よって $\deg(f) = \pm 1$ である。定理 2 において等号が成立つ訳だから被覆写像とホモトープ，しかも写像度が $\pm 1$ であるから同相写像とホモトープとなる。あとは定理 3 を使えば定理 1 は直ちに出る。

この証明からも分るように定理 3 を仲立にすればニールセンの定理は自然に次のような形に一般化される。（バルトハウゼン，Annals of Mathematics，第87巻（1968），61頁）

定理 4　$M$，$\overline{M}$ を $S^2$ とも $P^2$ とも同相でない閉曲面とする。連続写像 $f: \overline{M} \to M$ が被覆写像とホモトープであるのは準同型 $f_*: \pi_1(\overline{M}) \to \pi_1(M)$ が単射のときである。

連続写像が被覆写像とホモトープであるための条件は定理 2 でも与えられているがこちらの方がより基本的であろう。一つの証明がヘンペルの本「3－多様体」（Princeton Univ. Press, 1976, 137－140頁）の中に示されているが，その証明は簡略すぎてあまり読み易くない。ここで述べる証明の手順を言うと，まず曲面の写像 $f: \overline{M} \to M$ に対してある整数 $\Delta(f)$ を定義し，$f$ はそのホモトピー類の中で $\Delta(f)$ が最小であるように選ぶ。次に $f_*$ の単射性を利用して $f$ が分岐を許した被覆写像とホモトープであることを示す。この際 $\Delta(f)$ の最小性が非常に効果的である。最後に $f$ が本当に分岐をもつ被覆写像ならば $f_*$ は単射ではありえないことを示して証明が完了する。

ところで $M$，$\overline{M}$ が共に $P^2$ であるときは定理は正しくない。ヘンペルの本では見落されているので反例を示しておこう。複素平面の単位円 $|z| \leqq 1$ において円周上の対極点同志を同一視したものを $P^2$ とする。いま写像 $f: P^2 \to P^2$ を $f(z) = z^3$ で定義すれば $f_*: \pi_1(P^2) \to \pi_1(P^2)$ は同型。$f$ が被覆写像 $g: P^2 \to P^2$ にホモトープと仮定してみよう。この場合，被覆写像は必然的に同相写像である。いま $r: S^2 \to P^2$ を二重被覆としてこれによる $f$ と $g$ の持上げを $\hat{f}: S^2 \to S^2$ および $\hat{g}: S^2 \to S^2$ で表そう。ホモトピー群の完全例を考えると $r_*: \pi_2(S^2) \to \pi_2(P^2)$ は同型である。そこで $r_*(\hat{f}) = r \circ \hat{f} \sim r \circ g = r_*(\hat{g})$ より $\hat{f} \sim \hat{g}$ が出る。ところが $\hat{f}$，$\hat{g}$ の写像度がそれぞれ 3 と 1 であることは直接確めうる。矛盾。

定理 4 の証明　連続写像 $\phi: \overline{M} \to M$ のホモトピー類を $[\phi]$ で表わす。準同型 $\phi_*: \pi_1(\overline{M}) \to \pi_1(M)$ が単射であると仮定して $[\phi]$ が被覆写像を含むことを示そう。$M$ において互いに交わらない単純閉曲線の集まり $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\}$ を適当にとればこれらを縁とする $M$ の各々の部分曲面が円筒か T 字型の筒かまたはメービウスの帯のいづれかと同相になるようにできる。以下写像を言うときは $\Gamma$ およびあとで出る若干の孤に対して横断的であるものを考える。$f^{-1}(\Gamma)$ に属す閉曲線を $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \cdots, \bar{\gamma}_s$ としよう。$\bar{\gamma}_i$ $(i = 1, 2 \cdots, s)$ の $f$ による行き先を $\gamma_j$ として制限写像 $f: \bar{\gamma}_i \to \gamma_j$ の巻つき度数を $\delta(\bar{\gamma}_i ; f)$ で表わす。そして和を $\Delta(f) = \sum_{i=1}^{s} \delta(\bar{\gamma}_i ; f)$ とおく。

さて $[\phi]$ の中で $\Delta(f)$ が最小となるように $f$ を選んでおこう。各 $\bar{\gamma}_i \in f^{-1}(\Gamma)$ に対して $\delta(\bar{\gamma}_i ; f) > 0$ と仮定してよい，と言うのは巻にき数が 0 であると $\bar{\gamma}_i$ は $f$ の局所的なホモトピー変形で容易に取除かれるからである。まず $f(\bar{\gamma}_i)$ はホモトープ 0 だから $f_*$ の単射性より $\bar{\gamma}_i$ 自身がホモトープ 0 となる。$\bar{\gamma}_i$ は円板（と同相な曲面）$D$ を囲む。$f(\bar{\gamma}_i)$ を一点 $p$ の上に縮めておけば $\pi_2(M) = 0$ だから $f(D)$ も $p$ の上に縮めることができ，$\bar{\gamma}_i$ が $\Gamma$ の逆像から消去るという訳である。そこで次の条件が仮定できる。

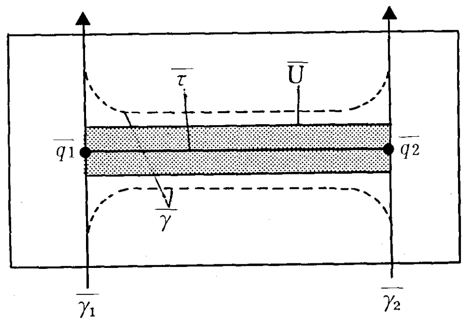
(R) $f$ は $\Gamma$ に対して正則である。この意味は $f^{-1}(\Gamma)$ 上の任意の点が $f$ によって同相に写像される近傍をもつということ。

いま $N$ を $\Gamma$ の曲線を縁とする部分曲面の一つとしよう。T 字型の筒である場合を考察するが他の場合も本質的に同じである。$N$ の縁を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ としておく。$N$ が二つの円板（と同相

な曲面) $D_1$, $D_2$ に分れるように弧 $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ をとる。$\varepsilon_1$ の両端 $p_1$, $p_2$ が, それぞれ $\gamma_1$, $\gamma_2$ に在るとしよう。次の主張は $\Delta(f)$ の最小性から導びかれるのだが, 証明の要めの部分と言えよう。

主張　$\varepsilon_1$ の逆像は単純閉曲線かまたは両端がそれぞれ $p_1$ と $p_2$ に写像される弧からなる。

$\varepsilon_1$ の逆像に属す弧 $\bar{\tau}$ についてその端点 $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ が共に $p_1$ に写像されると仮定して矛盾を導びこう。$\bar{q}_1$ が含まれる $f^{-1}(\Gamma)$ の閉曲線を $\bar{\gamma}_1$, $\bar{q}_2$ については $\bar{\gamma}_2$ とおく。$\overline{M}$ が向付できないならば $\bar{\gamma}_1$ と $\bar{\gamma}_2$ が一致することも起りうる。条件 (R) によって $\bar{\gamma}_1$ と $\bar{\gamma}_2$ は折返すことなく $\gamma_1$ に巻ついている。つぎに $\bar{\tau}$ の帯状近傍 $\overline{U}$ を考えると, f によってこれは折重ねられて端が $\gamma_1$ の上に揃うように写像される。そこで $\overline{U}$ の像を N の外へ押出すような局所的なホモトピー変形が考えられる。新しい写像を g として $g^{-1}(\Gamma)$ においては $\bar{\gamma}_1$ と $\bar{\gamma}_2$ に代わって一つの閉曲線 $\bar{\gamma}$ が出現する。(図を見よ) その他は $f^{-1}(\Gamma)$ と同じである。容易に分るように $\delta(\bar{\gamma}; g) < \delta(\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_2; f)$ となるから, $\Delta(g)$ は $\Delta(f)$ より小さい。矛盾。




さて元に戻って $\varepsilon_1$ の逆像 $f^{-1}(\varepsilon_1)$ が閉曲線を含むならば, それはホモトープ 0 だから前述の方法で除去できる。つまり $\varepsilon_1$ の逆像は主張で規定した弧のみとしてよい。この事実によってホモトピーを介して f は $\varepsilon_1$ に対して正則であるようにできる。$\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ についても同様に行う。以上を総合すると, f は円板 $D_1$, $D_2$ の縁に対して正則なものに直せることが分った。$D_1$ や $D_2$ の逆像が若干の円板からなることは殆んど自明であって, したがって f を部分曲面 N 上において分岐を許した被覆写像であるようにするのは容易であろう。同様の議論をすべての部分曲面について行う。即ち [$\phi$] は分岐を許した被覆写像を含む。

あとは次のことを証明すればよい。

主張　[$\phi$] は分岐をもつ被覆写像を含まない。

仮に f が分岐をもつ被覆写像とする。$\pi$: $M' \to M$ を M の普遍被覆とする。ここで $M'$ は基点から出るすべての道をホモトピーで類別したものとする。$M'$ の商空間 $M''$ を定義しよう。つまり $M'$ に属す二つの道 $x_1$, $x_2$ は終点が一致しかつ $\pi x_1 \cdot (\pi x_2)^{-1} \in f_*(\pi_1(\overline{M}))$ であるとき同一視される。$\pi'$ : $M'' \to M$ を射影とする。$f: \overline{M} \to M$ が $\pi'$ によって $g: \overline{M} \to M''$ に引上げられる。しかも $g_*: \pi_1(\overline{M}) \to \pi_1(M'')$ は同型である。g も分岐をもつ被覆であるが, k-重の被覆とすれば $\overline{M}$ のオイラー数 $< k \cdot M''$ のオイラー数。$\overline{M}$ と $M''$ は同相だから $\overline{M}$ のオイラー数は正でなければならない。そのような閉曲面は $S^2$ か $P^2$ に限られるから定理の仮定に反する。

これで定理 4 の証明が完全に終った。最後に定理 1 が向付できない閉曲面についても成立つことを注意しておく。$S^2$ と $P^2$ は除外する。これを定理 4 の応用として証明してみよう。$j: \pi_1(M) \to \pi_1(M)$ を任意の自己同型としよう。ホップの定理と定理 4 を併せれば j を誘

導する被覆写像 $f: M \to M$ の存在が導びける。仮に同相でない被覆写像としてみる。まず $M$ はトーラス $T^2$ かクライン管 $K^2$ に限られるが，$T^2$ の場合は前にも示したように写像度が $\pm 1$ でなくてはならない。したがってありえない。$K^2$ の場合は $j^{-1}$ を誘導する被覆写像 $g: K^2 \to K^2$ をとって $h = g \circ f: K^2 \to K^2$ とおこう。$h_* = 1$ だから $h$ は恒等写像とホモトープである。二重被覆 $p: T^2 \to K^2$ を定め，これによって $h$ を $\hat{h}: T^2 \to T^2$ に引上げておく。$\hat{h}$ も被覆度は1より大きい。一方 $\hat{h}$ は恒等写像にホモトープである。明らかに矛盾。つまり $f$ は同相写像である。